Sada příkladů na extrémy funkcí více proměnných

1. Vyšetřete lokální i globální exrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. Vyšetřete lokální i globální exrémy funkce $f(x,y,z) = 2xy^2 - 4xy + x^2 + z^2 - 2z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3. Vyšetřete lokální a globální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2y - ye^z + 2x + z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

4. Vyšetřete lokální i globální exrémy funkce $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5. Vyšetřete globální exrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y$, $(x,y) \in \{(x,y) : x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

6. Vyšetřete globální exrémy funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

7. Vyšetřete globální exrémy funkce $f(x,y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0\}$.

8. Vyšetřete globální exrémy funkce $f(x,y,z) = xyz$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$.

9. Vyšetřete globální exrémy funkce $f(x,y,z) = xy + yz$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$.

10. Vyšetřete globální exrémy funkce $f(x,y,z) = x + y$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^3 - 2xy = 0,\ x, y \geq 0\}$.

11. Vyšetřete globální exrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 + y$ na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^3 - 4y = 0,\ y \geq 0\}$.

12. Vyšetřete globální extrémy funkce $x^2 + y^2 + z + 2xz$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$.

13. Vyšetřete globální extrémy funkce $4x^2 + yz$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 48\}$.

14. Nalezněte nejbižší bod k bodu $(0,0,0)$ na množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 3z + 3 = x\}$.

15. Jaký je nejbližší a nejvzdálenější bod od počátku ležící v množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 5, x - 2y + z = 10\}$.

16. Nalezněte nejvzdálenější bod od roviny porcházející počátkem a kolmé na vektor $(1,2,3)$, ležící v množině $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$.

Výsledky:

1. lokální i globální minimum v $(-1,-2,3)$ lokální (a tedy ani globální maximum neexistuje),
2. lokální minimum v $(1,1,1)$ globální extrémy ani neexistují,
3. funkce nemá žádný bod lokálního ani globálního oextrému
4. lokální i globální minimum v $(0,0)$, lokální i globální maximumm v bodech (x,y) splňujících $x^2+y^2=1$.
5. Globální minimum v bodě $(0,0)$, globální maxima v bodech $(1,0)$ a $(0,1)$
6. Globální maxima v bodech $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, globální mimima v bodech $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
7. Globální minimum v bodě $(-2,0)$ globální maximum v bodě $(-\frac{1}{2},0)$.
8. Globální maxima v bodech $\left(\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, globální mimima v bodech $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.
9. Globální maxima v bodech $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4},\frac{1}{2},\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$, globální mimimum v bodě $\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.
10. Globální maximum v bodě $(1,1)$, globální minimum v bodě $(0,0)$.